

單元二的簡易短題目

1. 設 $y = e^{3x}$ 。從基本原理求 $\frac{dy}{dx}$ 。

2. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ，

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}。$$

(b) 利用 (a)，計算 $3^3 + 6^3 + 9^3 + \dots + 300^3$ 。

3. 設 n 為一正整數。 $(1+3x)^n(1-2x)^2$ 的展開式中 x^2 的係數為 160。求

(a) n ，

(b) 該展開式中 x^3 的係數。

4. (a) 利用代換積分法，求 $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$ 。

(b) 在曲線 C 上任意點 (x, y) ， C 的切線的斜率為 $\frac{3x}{e^{x^2}}$ 。若點 $(0, 1)$ 在 C 上，求 C 的方程。

5. (a) 證明 $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \tan\beta$ 。

(b) 假定對某些實數 x 及 y ， $\sin(x+y) - 2\cos(x+y) = 2\cos(x-y) + \sin(x-y)$ 。
利用 (a)，或其他方法，求 $\tan 2y$ 的值。

6. 對所有 $x \neq -1$ ，定義 $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 1}$ 。將 $y = f(x)$ 的圖像記為 C 。求

(a) C 的漸近線，

(b) C 在 x 的座標為 -2 的切線的方程。

7. 考慮曲線 $C: y = \cos x \sin 2x$ ，其中 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 。求 C 的極點。

高中數學延伸部分專責委員會 (照顧學習多樣性的強化措施)
所建議的簡易短題目示例

8. (a) 將 $(\sec x - \cos x)^2$ 表為 $\sec^2 x + p \cos 2x + q$ 的形式，其中 p 及 q 均為常數。

(b) 利用 (a) 的結果，或其他方法，計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec x - \cos x)^2 dx$ 。

9. (a) 求 $\int x \ln 2x dx$ 。

(b) 考慮曲線 $C: y = \sqrt{x \ln 2x}$ ，其中 $x \geq \frac{1}{2}$ 。設 R 為 C 、 x 軸及直線 $x = 5$ 圍成的區域。

求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

10. M 為 XY 上的一點使得 $XM:MY = 1:2$ 。設 $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ 及 $\overrightarrow{OY} = \mathbf{y}$ ，其中 O 為原點。

(a) 以 \mathbf{x} 及 \mathbf{y} 表示 \overrightarrow{OM} 。

(b) 已知 $|\mathbf{x}| = 2$ 、 $|\mathbf{y}| = 3$ 及 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2$ 。利用 (a) 的結果，求 $|\overrightarrow{OM}|$ 。

11. 設 $\overrightarrow{OA} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 。

(a) 計算 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ 。

(b) 利用 (a) 的結果，或其他方法，求 OC 與平面 OAB 間的交角。

12. 考慮以下實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ -x + az = b \\ 2x + y + 3z = 2 \end{cases}, \text{ 其中 } a \text{ 及 } b \text{ 均為實常數。}$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 a 值的範圍。

(ii) 以 a 及 b 表 y 。

(b) 假設 (E) 有無限多解。解 (E)。

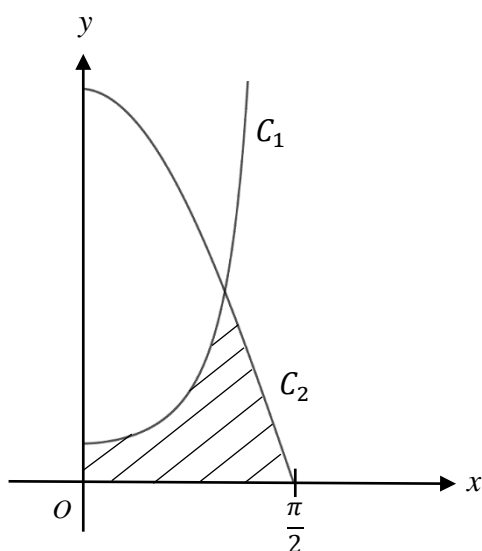
高中數學延伸部分專責委員會 (照顧學習多樣性的強化措施)
所建議的簡易短題目示例

13. 設 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 及 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。

- (a) 求 B^{-1} 。
- (b) 求一矩陣 C 使得 $AB = BC$ 。
- (c) 利用 (b) 的結果，求 A^{100} 。

14. (a) 解方程 $\sec^2 x - 8\cos x = 0$ ，其中 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 。

- (b) 下圖顯示曲線 $C_1: y = \sec^2 x$ 與曲線 $C_2: y = 8\cos x$ 所圍成的陰影區域，其中 O 為原點。求陰影區域的面積。



15. 點 A 及點 B 的座標分別為 $(-1, 0)$ 及 $(5, 0)$ 。點 C 由原點 O 沿 y 軸向上移動使得 $\triangle ABC$ 的周界以恆速率每秒 $\frac{1}{7}$ 單位增加。

- (a) 求當 $OC = 2\sqrt{6}$ 單位時 OC 的變率。
- (b) 設 $\angle ABC = \theta$ 弧度。
 - (i) 利用 (a) 的結果，求當 $OC = 2\sqrt{6}$ 單位時 θ 的變率。
 - (ii) 求當 $AC \perp CB$ 時 θ 的變率。